Zum „astronomischen" Bewegungsproblem in der allgemeinen Relativitätstheorie

Von D. GEISSLER

Aus dem Theoretisch-Physikalischen Institut der Universität Leipzig

(Z. Naturforschg. 14 a, 689—696 [1959]; eingegangen am 10. April 1959)

Die Bewegungsgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie werden für den Fall schwacher Felder und beliebiger Geschwindigkeiten der beteiligten Körper mit Berücksichtigung von deren Eigenfeld in erster Näherung in der Gravitationskonstanten berechnet und für einen Spezialfall integriert.

Ein wesentliches Merkmal der Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie ist ihre Nichtlinearität. Diese hat zur Folge, wie EINSTEIN und GROMMER [1] allgemein zeigen konnten, daß die Bewegungsgleichungen materieller Körper in den Feldgleichungen enthalten sind. Eine explizite Darstellung der Bewegungsgleichungen von Körpern, deren Eigenfeld nicht vernachlässigt werden kann, gelang EINSTEIN, INFELD und HOFFMANN [2] unter folgenden Voraussetzungen:

(A) Schwaches Gravitationsfeld [3]:

$$|g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}| \ll 1 .$$

(B) Ausdehnung der Körper klein gegen ihren gegenseitigen Abstand.

(C) Langsame Bewegung der betrachteten Körper:

$$v/c \ll 1 .$$

Die Näherung wurde dabei bis zu Termen der Ordnung G^2 bzw. $G(v/c)^2$ einschließlich getrieben (G = NEWTONsche Gravitationskonstante).

Während EINSTEIN, INFELD und HOFFMANN die Körper als Singularitäten des Gravitationsfeldes auffaßten, behandelten FOCK [4] und PETROVA [5] dasselbe Problem unter Berücksichtigung der inneren Struktur der Körper, wobei sich dieselben Bewegungsgleichungen ergaben. PAPAPETROU [6] konnte dann die Methode von FOCK durch konsequente Verwendung der dynamischen Gleichung wesentlich vereinfachen.

In den Abschnitten 1 bis 5 dieser Arbeit wird eine Methode zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen für *beliebige* Geschwindigkeiten, also nur unter den Annahmen (A) und (B), beschrieben. Die Ergebnisse werden in erster Näherung, d. h. bis zu Termen der Ordnung G einschließlich, angegeben.

Im Sinne der Methode von FOCK [4] und PAPAPETROU [6] wird das Innere der Körper in konsequenter Weise behandelt, wobei wir mit ziemlich allgemeinen Annahmen über die Form des Materietensors auskommen werden. BERTOTTI [7], der inzwischen dasselbe Problem bearbeitet hat, führt im Gegensatz dazu schematisch eine zentrale Weltlinie jedes Körpers ein, in deren Nähe der Druck in der als ideale Flüssigkeit vorausgesetzten Materie gewissen Bedingungen genügen muß.

In Abschnitt 6 werden die Bewegungsgleichungen für einen Spezialfall integriert. Es handelt sich dabei um die hyperbolische Bewegung zweier Körper, deren Bahnen sich nur wenig von geraden Linien unterscheiden.

1. Feldgleichungen und Materietensor

Wir verwenden die DE DONDERsche Koordinatenbedingung [8]

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 , \tag{1}$$

weshalb es sich empfiehlt, als Feldgrößen die $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ zu nehmen. Wir setzen demgemäß

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + k^{\mu\nu} + \dots \tag{2}$$

[1] A. EINSTEIN u. J. GROMMER, S.B. Berlin. Akad. Wiss. **2** [1927].

[2] A. EINSTEIN, L. INFELD u. B. HOFFMANN, Ann. Math. **39**, 65 [1938]. — A. EINSTEIN u. L. INFELD, Ann. Math. **41**, 455 [1940]; Canad. J. Math. **1**, 209 [1949].

[3] Griechische Indizes laufen von 0 bis 3, lateinische aus der Mitte des Alphabets ($i, k, \dots$) von 1 bis 3; $\eta_{00}=1$, $\eta_{0i}=0$, $\eta_{ik}=-\delta_{ik}$. Lateinische Indizes vom Anfang des Alphabets ($a, b, \dots$) bezeichnen die Nummer eines Körpers.

[4] V. A. FOCK, J. Phys. USSR **1**, 81 [1939].

[5] N. PETROVA, Žurn. Eksper. Teor. Fiz. **19**, 989 [1949].

[6] A. PAPAPETROU, Proc. Phys. Soc., Lond. A **64**, 57 [1951].

[7] B. BERTOTTI, Nuov. Cim. **4**, 898 [1956].

[8] TH. DE DONDER, Théorie des Champs Gravifiques, Gauthier-Villars, Paris 1926. — A. PAPAPETROU, Proc. Phys. Soc., Lond. A **64**, 302 [1951].

Der Entwicklungsparameter ist $\varkappa = 8\pi G/c^4$ und $k^{\mu\nu}$ sind die in $\varkappa$ linearen Terme.

In den Feldgleichungen

$$R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} g^{\mu\nu} R = -\varkappa T^{\mu\nu} \qquad (3)$$

denken wir uns den Materietensor $T^{\mu\nu}$ ebenfalls nach Potenzen von $\varkappa$ entwickelt:

$$T^{\mu\nu} = \underset{0}{T^{\mu\nu}} + \underset{1}{T^{\mu\nu}} + \dots, \qquad (4)$$

wobei $\underset{0}{T^{\mu\nu}} \propto \varkappa^0$, $\underset{1}{T^{\mu\nu}} \propto \varkappa^1$ usw. gilt. In erster Näherung reduziert sich dann (3) auf die wohlbekannten linearisierten Feldgleichungen

$$\eta^{\varrho\sigma} k^{\mu\nu}{}_{,\varrho\sigma} = 2\varkappa \underset{0}{T^{\mu\nu}}. \qquad (5)$$

Den Materietensor schreiben wir in der Form

$$\mathfrak{T}^{\mu\nu} = \bar{\varrho}\, u^\mu u^\nu + p^{\mu\nu} \qquad (6)$$

mit der Geschwindigkeit

$$u^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}s \quad (\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu), \qquad (7)$$

der Energiedichte $\bar{\varrho}$ und dem Spannungstensor $p^{\mu\nu}$. Es wird sich als zweckmäßig erweisen, mit Hilfe der $\eta_{\mu\nu}$ eine Vierergeschwindigkeit U^μ durch

$$U^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\sigma \quad (\mathrm{d}\sigma^2 = \eta_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu) \qquad (8)$$

einzuführen. Benutzen wir die Abkürzung

$$\varrho = \bar{\varrho}(\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}s)^2, \qquad (9)$$

so wird aus (6)

$$\mathfrak{T}^{\mu\nu} = \varrho\, U^\mu U^\nu + p^{\mu\nu}. \qquad (10)$$

Da wir uns nur für diskrete Körper interessieren, können wir aufteilen:

$$\mathfrak{T}^{\mu\nu} = \sum_a \mathfrak{T}^{\mu\nu}_a = \sum_a \left(\varrho_a U^\mu_a U^\nu_a + p^{\mu\nu}_a\right). \qquad (11)$$

ϱ_a und $p^{\mu\nu}_a$ sind nur im Körper a von Null verschieden.

Wir wollen annehmen, daß alle Körper reine Translationsbewegungen ausführen, so daß die Vierergeschwindigkeit U^μ_a durch

$$U^\mu_a = \{U^0_a, U^i_a\} = \{(1 - \dot{a}^k \dot{a}^k/c^2)^{-1/2},\ (\dot{a}^i/c)(1 - \dot{a}^k \dot{a}^k/c^2)^{-1/2}\} \qquad (12)$$

gegeben ist. Die $\dot{a}^i = \mathrm{d}a^i/\mathrm{d}t$ bedeuten dabei die Komponenten der dreidimensionalen Geschwindigkeit des Körpers[9] a. Über die Größen $p^{\mu\nu}_a$ brauchen wir nur vorauszusetzen, daß sie von 1. Ordnung klein sind[10] und daß im Ruhsystem des Körpers a

$$p^{0\nu}_a = 0 \qquad (13)$$

gilt[11]. Damit wird aus (11)

$$\underset{0}{T^{\mu\nu}_a} = \underset{0}{\varrho_a} U^\mu_a U^\nu_a. \qquad (14)$$

Aus (1) und (5) findet man dann in nullter Näherung

$$U^\mu_a = \text{const}, \qquad \underset{0}{\varrho_a} = \text{const}. \qquad (15)$$

Wir können nun die retardierten Lösungen[12] der linearen Feldgleichungen (5) sofort angeben. Da wir die Bewegungsgleichungen des Körpers a aufstellen wollen, schreiben wir die Lösungen für einen Aufpunkt $x_a = (x^\mu_a)$ im Inneren dieses Körpers auf. Sie lauten

$$k^{\mu\nu}(x_a) = k^{\mu\nu}_a(x_a) + \sum_{b \neq a} k^{\mu\nu}_b(x_a). \qquad (16)$$

Der erste Term bedeutet den vom Körper a selbst herrührenden Beitrag und hat nach (5) und (14) die Form

$$k^{\mu\nu}_a(x_a) = U^\mu_a U^\nu_a J_a(x_a), \quad J_a \propto \varkappa. \qquad (17)$$

Von dem Faktor J_a genügt es für unsere Zwecke zu wissen, daß er proportional zu $\varkappa$, also von erster Ordnung klein ist und nicht von μ und ν abhängt. Der zweite Term in (16) faßt die Beiträge aller anderen Körper außer a zusammen. Wegen der Voraussetzung (B) kommt es hierbei nicht auf die genaue Lage des Aufpunkts im Körper a an, so daß wir im Argument die Aufpunktskoordinaten $x_a = (x^\mu_a)$ durch die Koordinaten $a = (a^\mu)$ eines fest gewählten Punktes[13] ersetzen dürfen.

Die $k^{\mu\nu}_b(a)$ sind gegeben durch (vgl. z. B. SYNGE[14])

$$k^{\mu\nu}_b(a) = \varkappa \frac{c^2}{2\pi} m_b U^\mu_b U^\nu_b [w_b(a)]^{-1}, \qquad (18)$$

$$w_b(a) = -U_{b\sigma}\,(b'^\sigma - a^\sigma), \quad U_{b\sigma} = \eta_{\sigma\varrho} U^\varrho_b \qquad (19)$$

[9] Die $\dot{a}^i$ sind in unserer ersten Näherung für alle Punkte des Körpers a gleich. Zwar wird Körper a beschleunigt und erfährt dadurch zeitlich variable LORENTZ-Kontraktionen. Da wir aber ein schwaches Feld betrachten, ist die Beschleunigung klein und der durch diesen Effekt hervorgerufene Unterschied in den Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte des Körpers macht sich erst in zweiter Näherung bemerkbar.

[10] Das ist äquivalent mit der üblichen Annahme, daß die Dichte nicht sehr groß ist.

[11] Für ideale Flüssigkeiten wäre z. B. $p^{\mu\nu} = p(u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu})$.

[12] Alle Überlegungen gelten genauso für die avancierten Potentiale bzw. eine Linearkombination von retardierten und avancierten Potentialen.

[13] Bei Körpern mit Kugelsymmetrie im Ruhsystem kann man dafür z. B. die Koordinaten des Mittelpunktes wählen.

[14] J. L. SYNGE, Relativity: The Special Theory, North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1956.

Hierbei ist zur Abkürzung

$$m_b = \frac{1}{c^2} \int_{(b)} \underset{0}{\varrho_b} \, \mathrm{d}V \tag{20}$$

gesetzt worden, wo über das Volumen des Körpers b bei $x^0 = \mathrm{const}$ zu integrieren ist, und (b'^{σ}) ist der Punkt, wo die Vergangenheit des zum Punkt (a^{σ}), d. h. zur Lage des Körpers a im betrachteten Zeitpunkt $t = x^0/c$ gehörigen Lichtkegels die Weltlinie des Körpers b [wegen (15) eine gerade Linie in nullter Näherung] schneidet (vgl. Abb. 1).

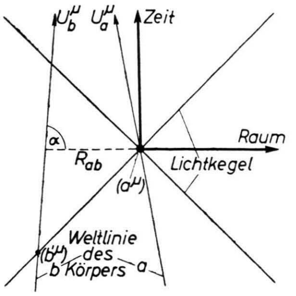

Abb. 1.
Lage des Punktes b'^{μ}.

2. Dynamische Gleichung

Die dynamische Gleichung

$$\mathfrak{T}_{\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{T}^{\nu\sigma} g_{\nu\sigma,\mu} = 0 \tag{21}$$

lautet mit der Abkürzung

$$\begin{aligned} H(x_a) &= H_a(x_a) + \sum_{b \neq a} H_b(a) \\ &= -\tfrac{1}{2} U_a^\nu U_a^\sigma \Big[h_{a\nu\sigma}(x_a) + \sum_{b \neq a} h_{b\nu\sigma}(a) \Big], \end{aligned} \tag{22}$$

bei der die Größen

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} = (\tfrac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta_{\varrho\sigma} - \eta_{\mu\varrho}\eta_{\nu\sigma})\, k^{\varrho\sigma} \tag{23}$$

wie die $k^{\mu\nu}$ in (16) zerlegt sind, in erster Näherung

$$\mathfrak{T}_{a\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} + \underset{0}{\varrho_a} H_{,\mu}(x_a) = 0 . \tag{24}$$

Als nächstes bestimmen wir eine modifizierte Dichte

$$\varrho_a^* = \underset{0}{\varrho_a^*} + \underset{1}{\varrho_a^*}, \tag{25}$$

für die in der ersten Näherung ein Erhaltungssatz, nämlich

$$\mathrm{d}\varrho_a^*/\mathrm{d}\sigma = 0, \tag{26}$$

gelten soll. Dazu bilden wir mit Hilfe von (23) aus (10) die Tensordichte

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{a\mu}{}^{\nu} = g_{\mu\sigma}\mathfrak{T}_a^{\sigma\nu} &= (\underset{0}{\varrho_a} + \underset{1}{\varrho_a})\, U_{a\mu} U_a^\nu \\ &\quad + \underset{0}{\varrho_a} h_{\mu\sigma}(x_a)\, U_a^\sigma U_a^\nu + p_{a\mu}{}^{\nu} . \end{aligned} \tag{27}$$

Diese Gleichung differenzieren wir nach x^ν und multiplizieren sie anschließend mit U_a^μ. Die dabei aus dem letzten Term entstehende Invariante $p_{a\mu,}{}^{\nu}{}_{\nu} U_a^\mu$ verschwindet, weil sie gemäß (13) im Ruhsystem des Körpers a gleich Null ist. Wenn wir dann noch in der linken Seite $(= U_a^\mu \mathfrak{T}_{a\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu})$ (24) verwenden, erhalten wir nach einigen Umformungen, bei denen (8) gebraucht wird, für ϱ_a^* den Ausdruck

$$\varrho_a^* = U_a^0 \underset{0}{\varrho_a} + U_a^0 \,[\underset{1}{\varrho_a} - \underset{0}{\varrho_a} H(x_a)] . \tag{28}$$

Wenn nun die nach x^ν differenzierte Gl. (27) unter Beachten von (26), (28) und (15) in (24) benutzt wird, ergibt sich als dynamische Gleichung

$$\begin{aligned} D_{a\mu} \equiv \underset{0}{\varrho_a} U_a^0 U_{a\mu,0} &+ \underset{0}{\varrho_a} [h_{\mu\sigma,\nu}(x_a)\, U_a^\sigma U_a^\nu \\ &+ H_{,\nu}(x_a)\, U_{a\mu} U_a^\nu + H_{,\mu}(x_a)] + p_{a\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} = 0 . \end{aligned} \tag{29}$$

Mit Hilfe der CHRISTOFFEL-Symbole

$$\Gamma_{\varrho\sigma\mu} = \tfrac{1}{2}(h_{\mu\varrho,\sigma} + h_{\mu\sigma,\varrho} - h_{\varrho\sigma,\mu}) \tag{30}$$

entsteht daraus die Form

$$\begin{aligned} D_{a\mu} \equiv \underset{0}{\varrho_a} U_a^0 U_{a\mu,0} &+ \underset{0}{\varrho_a} U_a^\varrho U_a^\sigma [\Gamma_{\varrho\sigma\mu}(x_a) \\ &- U_{a\mu} U_a^\nu \Gamma_{\varrho\sigma\nu}(x_a)] + p_{a\mu}{}^{\nu}{}_{,\nu} = 0 . \end{aligned} \tag{31}$$

Die vier Gln. (31) sind nicht linear unabhängig voneinander, denn es gilt

$$D_{a\mu} U_a^\mu = 0 . \tag{32}$$

Die vierte Komponente der dynamischen Gleichung ist durch (26) zusammen mit (28) gegeben.

3. Selbstkräfte

Wir schreiben zunächst (29) im momentanen Ruhsystem des Körpers a $(U_a{}^0 = 1,\ U_a{}^i = 0)$ auf. Mit (17), (22) und (23) finden wir

$$\begin{aligned} \underset{0}{\varrho_a} U_{ai,0} + \underset{0}{\varrho_a} \Big[\sum_{b \neq a} h_{bi0,0}(x_a) &+ H_{a,i}(x_a) \\ &+ \sum_{b \neq a} H_{b,i}(x_a) \Big] + p_{ai}{}^{\nu}{}_{,\nu} = 0 \end{aligned} \tag{33}$$

(im Ruhsystem von Körper a).

Da nach Voraussetzung (B) die Größen $h_{bi0}(x_a)$ und $H_b(x_a)$ im Körper a praktisch konstant sind, können wir (33) zerspalten und schließen

$$\underset{0}{\varrho_a} H_{a,i}(x_a) + p_{ai}{}^{\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{34}$$

(im Ruhsystem von Körper a).

Durch eine LORENTZ-Transformation auf das ursprüngliche System, in dem sich der Körper a mit der Vierergeschwindigkeit U^μ_a bewegt, wird[15] aus (34)

$$p_{a\mu,\nu}^{\ \ \nu} + \underset{0}{\varrho_a}(H_{a,\mu} - U_{a\mu} U^\nu_a H_{a,\nu}) = 0 . \quad (35)$$

Für die in der dynamischen Gl. (29) enthaltenen Selbstkraft- und Druckterme

$$K_{a\mu} \equiv p_{a\mu,\nu}^{\ \ \nu} + \underset{0}{\varrho_a}[h_{a\mu\sigma,\nu} U^\sigma_a U^\nu_a + H_{a,\nu} U_{a\mu} U^\nu_a + H_{a,\mu}] \quad (36)$$

findet man mit Hilfe von (35), (17), (22) und (23) nach leichter Rechnung

$$K_{a\mu} = 0 . \quad (37)$$

Die Selbstkraft- und Druckterme heben sich also gegenseitig weg.

4. Bewegungsgleichungen

Wenn wir (36) und (37) in (29) berücksichtigen, erhalten wir die Bewegungsgleichungen in der Form

$$U^0_a U_{a\mu,0} + U^\sigma_a U^\nu_a \sum_{b \neq a} h_{b\mu\sigma,\nu}(a) + U_{a\mu} U^\nu_a \sum_{b \neq a} H_{b,\nu}(a) + \sum_{b \neq a} H_{b,\mu}(a) = 0 . \quad (38)$$

Die Größen $h_{b\mu\sigma}$ und H_b sind dabei durch (22) und (23) mit den bekannten, durch (18) und (19) gegebenen Potentialen $k^{\mu\nu}_b$ verknüpft. Führen wir das alles in (38) ein, so entstehen die Gleichungen

$$U^0_a U_{a\mu,0} + S_{a\mu} = 0 \quad (39)$$

mit den Abkürzungen

$$S_{a\mu} = \sum_{b \neq a} \{ f_{b,\nu}(a)\, U^\nu_a [\tfrac{1}{4} U_{a\mu} + \tfrac{1}{2} U_{a\mu} (U^\sigma_a U_{b\sigma})^2 - U_{b\mu}(U^\sigma_a U_{b\sigma})] - f_{b,\mu}(a)\, [\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}(U^\sigma_a U_{b\sigma})^2] \} , \quad (40)$$

$$f_b(a) = 4\, m_b [w_b(a)]^{-1} . \quad (41)$$

Wir setzen noch

$$s_{a\mu} = - \sum_{b \neq a} \{ U_{b\mu} (U^\sigma_a U_{b\sigma})\, f_{b,\nu}(a)\, U^\nu_a + [\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}(U^\sigma_a U_{b\sigma})^2]\, f_{b,\mu}(a) \} . \quad (42)$$

Nach einfacher Umrechnung mit Hilfe von (12) ergibt sich dann für die Bewegungsgleichungen des Körpers a die Gestalt

$$\ddot{a}^i = \frac{G}{(U^0_a)^2} \left(s_{ai} + \frac{\dot{a}^i}{c} s_{a0} \right) . \quad (43)$$

Die durch (38) bis (43) beschriebene Bewegung gestattet eine einfache geometrische Deutung: *In der betrachteten Näherung bewegt sich Körper a auf den geodätischen Bahnen des durch alle anderen Körper erzeugten Gravitationsfeldes.*

Man rechnet nämlich leicht nach, daß die Gleichungen einer geodätischen Linie:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\varrho\sigma} \frac{dx^\varrho}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} = 0 \quad (44)$$

in dem von allen Körpern b ≠ a am Ort des Körpers a hervorgerufenen Gravitationsfeld, das in der hier interessierenden ersten Näherung durch

$$g_{\mu\nu}(a) = \eta_{\mu\nu} + \sum_{b \neq a} h_{b\mu\nu}(a) \quad (45)$$

gegeben ist, mit den Bewegungsgleichungen in der Form (38) übereinstimmen.

Die Möglichkeit einer Subtraktion des Eigenfeldes des Körpers a vom Gesamtfeld ist offensichtlich an den linearen Charakter der ersten Näherung gebunden; in höheren Näherungen wird sich die Bewegung nicht so einfach geometrisch deuten lassen.

Um die Bewegungsgleichungen explizit darzustellen, drücken wir zunächst die retardierten Potentiale (41) [mit (19)] durch den gleichzeitigen Abstand

$$R_{ab} = [(a^i - b^i)(a^i - b^i)]^{1/2} \quad (46)$$

zwischen den Körpern a und b aus. Aus den in Abb. 1 dargestellten geometrischen Verhältnissen ergibt sich

$$f_b(a) = \frac{4\, m_b}{U^0_b R_{ab}} \left(1 + \frac{\dot{b}^2_R}{c^2} - \frac{\dot{b}_2}{c^2} \right)^{-1/2} \quad (47)$$

mit den Bezeichnungen

$$\dot{b}^2 = \dot{b}^i \dot{b}^i , \quad \dot{b}_R = \dot{b} \cos \alpha = \frac{1}{R_{ab}} \dot{b}^k (a^k - b^k) . \quad (48)$$

Daraus folgt (vgl. SYNGE[14], Appendix B)

$$f_{b,\nu}(a) = - \frac{4\, m_b}{(U^0_b)^3 R^3_{ab}} \left(1 + \frac{\dot{b}^2_R}{c^2} - \frac{\dot{b}^2}{c^2} \right)^{-3/2} \cdot \eta_{\mu\nu} \left(b^\mu - a^\mu - U^0_b U^\mu_b R_{ab} \frac{\dot{b}_R}{c} \right) , \quad (49)$$

wobei noch $a^0 = b^0$ zu beachten ist. Durch Einsetzen von (49) in (43) entsteht dann mit Hilfe von (12) die explizite Form der Bewegungsgleichungen

[15] Die 0-Komponente von (35) reduziert sich beim Übergang zum Ruhsystem auf eine Identität.

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}^i = -G \sum_{b \neq a} m_b R_{ab}^{-3} \left(1 + \frac{\dot{b}_R^2}{c^2} - \frac{\dot{b}^2}{c^2}\right)^{-3/2} \Bigg\{ (a^l - b^l) \frac{\dot{b}^l}{c} \left(\frac{\dot{a}^i}{c} - \frac{\dot{b}^i}{c}\right) \left[2\left(1 - \frac{\dot{a}^k}{c}\frac{\dot{b}^k}{c}\right)^2 \left(1 - \frac{\dot{b}^2}{c^2}\right)^{-1/2} + \left(1 - \frac{\dot{a}^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{\dot{b}^2}{c^2}\right)^{1/2} \right] \\
+ (a^i - b^i) \left[2\left(1 - \frac{\dot{a}^k}{c}\frac{\dot{b}^k}{c}\right)^2 \left(1 - \frac{\dot{b}^2}{c^2}\right)^{1/2} - \left(1 - \frac{\dot{a}^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{\dot{b}^2}{c^2}\right)^{3/2} \right] \\
- 4 (a^l - b^l) \frac{\dot{a}^l}{c} \left(\frac{\dot{a}^i}{c} - \frac{\dot{b}^i}{c}\right) \left(1 - \frac{\dot{a}^k}{c}\frac{\dot{b}^k}{c}\right) \left(1 - \frac{\dot{b}^2}{c^2}\right)^{1/2} \Bigg\}.
\end{aligned}
\tag{50}
$$

Wenn die Geschwindigkeiten aller Körper klein gegen die Lichtgeschwindigkeit, aber immerhin noch so groß sind, daß für alle Körper $(\dot{a}^i/c)^2 \gg$ Terme zweiter Näherung ($\propto G^2$) gilt [16], ist eine Entwicklung nach Potenzen von $\dot{a}^i/c$ bis zur zweiten Ordnung physikalisch sinnvoll. Führt man das in Gl. (50) durch, so erhält man nach kurzer Rechnung die üblichen Bewegungsgleichungen von Einstein–Infeld–Hoffmann (vgl. z. B. Papapetrou [6]) bis auf die zu G^2 proportionalen Terme, die in der hier betrachteten ersten Näherung natürlich nicht auftreten können.

5. Formeln für die $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ bei weit entfernten Aufpunkten

Hier sollen Ausdrücke für die Feldgrößen $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ unter folgenden Voraussetzungen angegeben werden:

1. Die Geschwindigkeit aller Körper ist klein gegen die Lichtgeschwindigkeit.
2. Der räumliche Abstand R des Aufpunktes, in dem wir das Feld bestimmen, vom Ursprung ist sehr groß gegen den Abstand der einzelnen Körper vom Ursprung:

$$R = (x^i x^i)^{1/2} \gg (a^i a^i)^{1/2} \quad \text{für alle } a. \tag{51}$$

3. Der Schwerpunkt des ganzen Systems ruht:

$$\sum_a m_a \dot{a}^i = 0. \tag{52}$$

Dazu kommen natürlich noch die Voraussetzungen (A) und (B) der Einleitung, die ja für die ganze Arbeit gelten.

Nach (2), (16) und (18) haben wir zunächst

$$\mathfrak{g}^{\mu\nu}(x) = \eta^{\mu\nu} + \frac{4G}{c^2} \sum_a m_a U_a^\mu U_a^\nu \, [w_a(x)]^{-1}. \tag{53}$$

Wegen (51) gilt näherungsweise

$$w_a(x) = U_a^0 R \left(1 - n^i \frac{\dot{a}^i}{c}\right) \tag{54}$$

mit der Abkürzung

$$n^i = x^i / R. \tag{55}$$

Wenn wir nun in (53) Terme bis zur zweiten Ordnung in $\dot{a}^i/c$ berücksichtigen, so erhalten wir

$$
\left.
\begin{aligned}
\mathfrak{g}^{ik} &= -\delta^{ik} + \frac{4G}{c^2 R} \sum_a m_a \frac{\dot{a}^i}{c} \frac{\dot{a}^k}{c}, \\
\mathfrak{g}^{0i} &= \frac{4G}{c^2 R} n^k \sum_a m_a \frac{\dot{a}^i}{c} \frac{\dot{a}^k}{c}, \\
\mathfrak{g}^{00} &= 1 + \frac{4G}{c^2 R} \left[\sum_a m_a \left(1 + \frac{\dot{a}^2}{2c^2}\right) \right. \\
&\qquad \left. + n^i n^k \sum_a m_a \frac{\dot{a}^i}{c} \frac{\dot{a}^k}{c} \right].
\end{aligned}
\right\}
\tag{56}
$$

In den beiden letzten Gleichungen ist (52) verwendet worden. Führen wir noch die bewegten Massen

$$\hat{m}_a = m_a \left(1 + \frac{\dot{a}^2}{2c^2}\right) \tag{57}$$

und die retardierten Trägheitsmomente

$$D^{ik}(\tau) = \sum_a \hat{m}_a \, a^i(\tau) \, a^k(\tau), \quad \tau = x^0 - R \tag{58}$$

ein, so erhalten wir für die $\mathfrak{g}^{\mu\nu}$ schließlich die Ausdrücke

$$
\left.
\begin{aligned}
\mathfrak{g}^{ik} &= -\delta^{ik} + \frac{2G}{c^2 R} \frac{\partial^2}{\partial x^{02}} D^{ik}(\tau), \\
\mathfrak{g}^{0i} &= -\frac{2G}{c^2 R} \frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^k} D^{ik}(\tau), \\
\mathfrak{g}^{00} &= 1 + \frac{4G}{c^2 R} \sum_a \hat{m}_a + \frac{2G}{c^2 R} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} D^{ik}(\tau).
\end{aligned}
\right\}
\tag{59}
$$

Dieselben Formeln sind kürzlich auf anderem Wege von Fock [17] hergeleitet worden.

6. Integration der Bewegungsgleichungen

Bei „elliptischen" Bewegungen [18] (etwa von Planeten oder Doppelsternen) muß man die Bewegungs-

[16] Für ein Zweikörpersystem z. B. würde das bedeuten, daß die Bewegung in Newtonscher Näherung nicht auf elliptischen, sondern auf hyperbolischen Bahnen geschieht, die sich nicht sehr stark von geraden Linien unterscheiden.

[17] V. A. Fock, Rev. Mod. Phys. **29**, 325 [1957].

[18] Bei der Unterscheidung von „elliptischen" und „hyperbolischen" Bewegungen denken wir an die Bahnen der Bestandteile eines Zweikörpersystems in Newtonscher Näherung.

gleichungen von EINSTEIN–INFELD–HOFFMANN [2] verwenden, da hier die zu G^2 proportionalen (bei uns fehlenden) Terme wesentlich sind und die Entwicklung nach Potenzen der Geschwindigkeit bis zur zweiten Ordnung berechtigt ist. In der Tat hat ROBERTSON [19] gezeigt, daß die Gleichungen von EINSTEIN–INFELD–HOFFMANN zur richtigen Periheldrehung eines kleinen Planeten im Feld eines schweren Zentralkörpers führen, während sich ohne die zu G^2 proportionalen Terme das (5/3)-fache des EINSTEINschen Wertes ergibt.

Wir wollen uns daher bei der Integration unserer Bewegungsgleichungen (50) auf den „hyperbolischen" Fall beschränken und außerdem noch voraussetzen:

1. Es sind nur zwei Körper vorhanden.
2. Ihre Bahnen weichen nur wenig von geraden Linien ab [20].

Wir bezeichnen die räumlichen Koordinaten der beiden Körper mit $x_a{}^i$ $(a=1,\ 2)$ und setzen

$$x^0 = c\,t = T\,.$$

Das Koordinatensystem wählen wir so, daß die Bewegung in nullter Näherung parallel zur x^3-Achse erfolgt, daß also in nullter Näherung gilt:

$$\begin{aligned} x_1{}^1 &= \tfrac{1}{2}\,l\,, & x_1{}^2 &= 0\,, & x_1{}^3 &= v_1\,T\,,\\ x_2{}^1 &= -\tfrac{1}{2}\,l\,, & x_2{}^2 &= 0\,, & x_2{}^3 &= v_2\,T\,. \end{aligned} \tag{60}$$

Dabei ist natürlich $|v_1| \leqq 1,\ |v_2| \leqq 1\,.$

Im Sinne unseres Näherungsverfahrens fassen wir die Beschleunigungen als kleine Größen auf und setzen demgemäß in die rechte Seite von (50) überall die nullte Näherung (60) ein [21]. Nach (48) ist

$$\begin{aligned} \frac{\dot a_{\mathrm R}}{c} &\to \frac{\dot x_{1\mathrm R}}{c} = -\frac{1}{R}\,v_1(v_1-v_2)\,T\,,\\ \frac{\dot b_{\mathrm R}}{c} &\to \frac{\dot x_{2\mathrm R}}{c} = \frac{1}{R}\,v_2(v_1-v_2)\,T \end{aligned} \tag{61}$$

mit
$$R^2 \equiv R_{12}^2 = l^2 + (v_1-v_2)^2\,T^2\,, \tag{62}$$

und wir erhalten nach einigen Umformungen

$$\frac{d^2 x_a^1}{dT^2} = C_a{}^1 (A_a + B\,T^2)^{-3/2}\,, \tag{63}$$
$$\frac{d^2 x_a^3}{d\,T^2} = C_a{}^3\,T\,(A_a + B\,T^2)^{-3/2} \qquad (a=1,\ 2) \tag{64}$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} &A_1 = l^2(1-v_2{}^2)\,, \qquad A_2 = l^2(1-v_1{}^2)\,,\\ &B = (v_1-v_2)^2\,,\\ &C_1{}^1 = -l\,M_2(1-v_2{}^2)^{1/2}K\,,\quad C_2{}^1 = -\frac{M_1}{M_2}\,C_1{}^1\,,\\ &M_a = G\,m_a/c^2\,,\\ &K = (1-v_1 v_2)^2 + (v_1-v_2)^2\,,\\ &C_1{}^3 = -M_2(v_1-v_2)\,(1-v_2{}^2)^{-1/2}(1-v_1 v_2)\\ &\quad\cdot [K - 4(v_1-v_2)^2]\,,\quad C_2{}^3 = -\frac{M_1}{M_2}\,C_1{}^3\,. \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Als Anfangsbedingungen wählen wir

$$\begin{gathered} x_1{}^1(-\infty) = \frac{l}{2}\,,\quad x_2{}^1(-\infty) = -\frac{l}{2}\,,\quad x_a{}^3(0) = 0\,,\\ \frac{\mathrm d x_a^1}{\mathrm d T}(-\infty) = 0\,,\ \frac{\mathrm d x_a^3}{\mathrm d T}(-\infty) = v_a\,, \end{gathered} \tag{66}$$

d. h. zu Anfang $(T=-\infty)$ bewegen sich beide Teilchen parallel und symmetrisch zur x^3-Achse mit der Geschwindigkeit v_a und laufen zur Zeit $T=0$ aneinander vorbei.

Die Bewegungsgleichungen (63) und (64) lassen sich ohne weiteres integrieren, und wir bekommen unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (66):

$$\frac{\mathrm d x_a^1}{\mathrm d T} = \frac{C_a^1}{A_a}\,[T\,(A_a + B\,T^2)^{-1/2} + B^{-1/2}]\,, \tag{67}$$

$$\frac{\mathrm d x_a^3}{\mathrm d T} = v_a - \frac{C_a^3}{B}\,(A_a + B\,T^2)^{-1/2}\,, \tag{68}$$

$$x_a^1 = \frac{C_a^1}{A_a B}\,[(A_a + B\,T^2)^{1/2} + B^{1/2}\,T] + (-1)^{a+1}\,\frac{l}{2}\,, \tag{69}$$

$$x_a^3 = v_a\,T - \frac{C_a^3}{B^{3/2}}\,\ln\left[\left(\frac{B}{A_a}\right)^{1/2} T + \left(1 + \frac{B}{A_a}\,T^2\right)^{1/2}\right]. \tag{70}$$

Durch Elimination von T aus (69) und (70) ergibt sich die Bahngleichung

$$x_a^3 = B^{-3/2}\left[\frac{v_a}{2}\left(A_a B^2\,\xi_a - \frac{1}{\xi_a}\right) - C_a^3 \ln(A_a^{1/2}\,B\,\xi_a)\right]. \tag{71}$$

Die dabei auftretende Variable ξ_a, definiert durch

$$\xi_a = \frac{1}{C_a^1}\left[x_a^1 + (-1)^a\,\frac{l}{2}\right], \tag{72}$$

ist wegen $x_1{}^1 \leqq \tfrac{1}{2}\,l$, $x_2{}^1 \geqq -\tfrac{1}{2}\,l$ und (65) stets größer oder gleich Null.

Die physikalisch am meisten interessierende Größe bei dieser Art von Bewegung ist der Ab-

[19] H. P. ROBERTSON, Ann. Math. **39**, 101 [1938].

[20] Ohne die zweite Voraussetzung wäre ein um so größerer Fehler zu erwarten, je größer die Krümmung der hyperbolischen Bahnen sein würde. Die folgenden Rechnungen werden um so besser gelten, je „steifer" die Bahnen sind.

[21] Die Summe in (50) reduziert sich hier auf ein einziges Glied; *a* bezieht sich auf Körper 1, *b* auf Körper 2.

lenkwinkel Θ_a, der Winkel zwischen den Bahnasymptoten des Körpers a $(a=1, 2)$. Er ist gegeben durch [22]

$$\operatorname{tg}\Theta_a = \lim_{x_a^3\to\infty} \left|\frac{\mathrm{d}x_a^3}{\mathrm{d}x_a^1}\right|^{-1}, \tag{73}$$

wofür man nach (67) und (68)

$$\operatorname{tg}\Theta_a = \frac{2}{v_a}\frac{|C_a^1|}{A_a B^{1/2}} \tag{74}$$

bekommt. Wenn wir (65) verwenden und bedenken, daß die rechte Seite von (74) von erster Ordnung klein ist, wir also den Tangens durch den Winkel selbst ersetzen dürfen, erhalten wir explizit

$$\begin{aligned} \Theta_1 \approx \operatorname{tg}\Theta_1 &= \frac{2\,M_2}{l}\frac{(1-v_1 v_2)^2+(v_1-v_2)^2}{v_1\,|v_1-v_2|\,(1-v_2^2)^{1/2}}, \\ \Theta_2 \approx \operatorname{tg}\Theta_2 &= \frac{2\,M_1}{l}\frac{(1-v_1 v_2)^2+(v_1-v_2)^2}{v_2\,|v_1-v_2|\,(1-v_1^2)^{1/2}}. \end{aligned} \tag{75}$$

Für den Spezialfall zweier gleicher, sich mit gleichen, entgegengesetzt gerichteten Anfangsgeschwindigkeiten bewegender Körper ($M_1=M_2=M$, $v_1=-v_2=v>0$) wird aus (75)

$$\Theta \approx \operatorname{tg}\Theta = \operatorname{tg}\Theta_1 = \operatorname{tg}\Theta_2 = \frac{M}{l}\frac{(1+v^2)^2+4\,v^2}{v^2(1-v^2)^{1/2}}. \tag{76}$$

Der Verlauf dieser Funktion ist in Abb. 2 dargestellt.

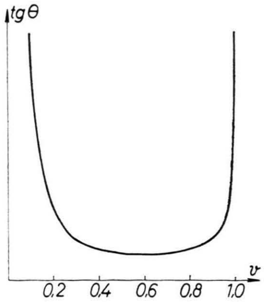

Abb. 2. Ablenkwinkel Θ als Funktion der Geschwindigkeit v. Das Minimum liegt bei $v\approx 0{,}6$.

Nach (75) und Abb. 2 gilt $\operatorname{tg}\Theta_a\to\infty$ für $v_a\to 0$. Der Ablenkwinkel wäre in diesem Fall nicht mehr klein. Für sehr kleine Geschwindigkeiten hat aber unser ganzes Näherungsverfahren keinen Sinn, da wir ja voraussetzen, daß sich beide Körper fast geradlinig bewegen. Das mit wachsendem v_a zunächst erfolgende Abnehmen von $\operatorname{tg}\Theta_a$, verursacht durch den Faktor v_a^{-1} in (7), entspricht den NEWTONschen Verhältnissen und rührt davon her, daß sich die Körper weniger lange in Bereichen mit starker Anziehung aufhalten. Diesem Effekt ist aber ein zweiter überlagert, der durch den Faktor $(1-v_2^2)^{-1/2}$ im Ausdruck für $\operatorname{tg}\Theta_1$ bedingt ist und der sich qualitativ als eine Vergrößerung der „felderzeugenden" Masse M_2 im Sinne der speziellen Relativitätstheorie deuten läßt [23]. Dadurch wird das Gravitationsfeld verstärkt und der Ablenkwinkel vergrößert, woraus sich das erneute Ansteigen der Kurve in Abb. 2 erklärt. Bei sehr großen Ablenkwinkeln – bedingt durch $v_a\to 1$ – gilt allerdings unsere Näherung wieder nicht mehr, weil dann das Gravitationsfeld so stark geworden ist, daß Voraussetzung (A), die unseren sämtlichen Rechnungen zugrunde liegt, nicht mehr erfüllt ist.

Körper	M (cm)	l (cm)	v'
Nukleon	10^{-52}	10^{-13}	10^{-73}
1 g	10^{-28}	1	10^{-51}
Sonne	10^{5}	10^{11}	10^{-6}

Tab. 1. Geschwindigkeiten $v'=1-v$, für die der Ablenkwinkel Θ die Größenordnung 0,01 annimmt.

In Tab. 1 sind einige Zahlenbeispiele zusammengestellt. Die erste Spalte gibt die Art der Körper an, die zweite ihren Gravitationsradius M und die dritte den senkrechten Abstand l zwischen ihren Bahnen bei großen Entfernungen. In der letzten Spalte ist die Größenordnung der Geschwindigkeit

$$v' = 1 - v$$

mit Hilfe der aus (76) folgenden, für $v'\ll 1$ gültigen Näherungsformel

$$\operatorname{tg}\Theta \approx \frac{8}{\sqrt{2}}\frac{M}{l}\frac{1}{\sqrt{v'}} \quad (v'\ll 1) \tag{77}$$

so berechnet worden, daß $\operatorname{tg}\Theta\approx\Theta$ jeweils die Größenordnung 0,01 bekommt. Man sieht, daß erst bei sehr großen Geschwindigkeiten eine merkliche Ablenkung auftritt. Der oben erörterte Fall, daß das Gravitationsfeld nicht mehr schwach ist, ist trotz der hohen Geschwindigkeiten noch nicht eingetreten; denn eine Überschlagsrechnung zeigt, daß in den in Tab. 1 aufgeführten Fällen alle nichtverschwindenden Größen $k^{\mu\nu}$ die Größenordnung 0,01 haben.

Für die Ablenkung eines Probeteilchens im Feld eines ruhenden Körpers ($M_2\gg M_1$, $v_2=0$) ergibt

[22] Wir rechnen Θ_a stets positiv.

[23] Eine entsprechende Vergrößerung der „trägen" Masse M_1 tritt dagegen im Ausdruck für $\operatorname{tg}\Theta_1$ nicht auf, wie man sieht.

sich aus (75)

$$\Theta_1 = 2\,\frac{M_2}{l}\left(1 + \frac{1}{v_1{}^2}\right). \qquad (78)$$

Denselben Wert findet man – wie es sein muß –, wenn man die Bahn eines Probeteilchens in einem SCHWARZSCHILD-Feld, das der Koordinatenbedingung (1) gehorcht, in erster Näherung berechnet. Für $v_1 = 1$ folgt aus (78) der bekannte Wert für die Lichtablenkung:

$$\Theta_1 = 4\,M_2/l\,. \qquad (79)$$

Ich bin Herrn Prof. PAPAPETROU für die Anregung zu diesen Untersuchungen und für viele wertvolle Diskussionen zu großem Dank verpflichtet.

Zur Gravitationsstrahlung nach BEL[1]

Von D. GEISSLER

Aus dem Theoretisch-Physikalischen Institut der Universität Leipzig

(Z. Naturforschg. **14 a**, 696—698 [1959]; eingegangen am 21. April 1959)

Die Ergebnisse von BEL[1] werden auf das Gravitationsstrahlungsfeld eines zeitweise nichtstationären Systems angewendet.

Die Schwierigkeiten, die das Problem der Gravitationsstrahlung in der allgemeinen Relativitätstheorie bietet, rühren bekanntlich vor allem davon her, daß man bei der Formulierung eines differentiellen Erhaltungssatzes für Energie und Impuls eines Systems, das allgemein aus Materie und zugehörigem Gravitationsfeld besteht, einen Pseudotensor einführen muß, eine Größe also, die sich nur bei linearen, nicht aber bei allgemeineren Koordinatentransformationen wie ein Tensor verhält. Wegen dieser mangelnden Kovarianz des Pseudotensors $\mathfrak{t}_\mu{}^\nu$ der Energie-Impuls-Dichte des Gravitationsfeldes ist es oft nur schwer möglich, die physikalische Realität der damit erhaltenen Ergebnisse zu erkennen, z. B. also festzustellen, ob eine in einem bestimmten Koordinatensystem nicht verschwindende Strömung von Gravitationsenergie in einem anderen Koordinatensystem nicht doch zu Null wird.

Einen Ausweg aus diesen Schwierigkeiten hat nun kürzlich BEL[1] versucht, indem er einen (echten) Tensor vierter Stufe angibt, der bemerkenswerte Analogien zum Energie-Impuls-Tensor des MAXWELL-Feldes aufweist und mit dessen Hilfe ein „Gravitationsstrahlungszustand" definiert wird.

Andererseits konnte vor kurzem gezeigt werden[2], daß die von einem zeitweilig nichtstationären System emittierte Gravitationsstrahlung eine nicht verschwindende Gesamtenergie besitzt, die sich nicht durch Koordinatentransformationen zu Null machen läßt. Obwohl hierbei die Gesamtenergie in der üblichen Weise, d. h. unter Verwendung des Pseudotensors $\mathfrak{t}_\mu{}^\nu$ definiert wird, ist das Ergebnis kovariant, was mit Hilfe der von WEYL[3] angegebenen integralen Form des allgemein-relativistischen Energie-Impuls-Satzes erreicht wird.

Es wird daher von Interesse sein, den Tensor von BEL für das Strahlungsfeld eines während einer endlichen Zeit nichtstationären Systems explizit auszurechnen und auf seinen physikalischen Gehalt zu untersuchen. Das soll im folgenden getan werden.

Der „Energie-Impuls"-Tensor von BEL ist definiert durch[4]

$$T_{\alpha\beta\mu\nu} = A\, g_{\alpha\beta}\, g_{\mu\nu} - M_{\alpha\beta\mu\nu} \qquad (1)$$

mit der Invarianten

$$A = \frac{1}{8}\, R^{\alpha\beta\mu\nu}\, R_{\alpha\beta\mu\nu} \qquad (2)$$

und dem Tensor

$$M_{\alpha\beta\mu\nu} = R^{\varrho}{}_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\mu}\, R_{\varrho\beta\sigma\nu} + R^{\varrho}{}_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\nu}\, R_{\varrho\beta\sigma\mu}\,. \qquad (3)$$

Dabei ist $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ der RIEMANNsche Krümmungstensor.

Wir betrachten nun ein makroskopisches System, das (dauernd) in der Nähe des Koordinatenursprungs lokalisiert ist und sich zu den Zeiten $t<0$ sowie $t>T$ (T endlich) in einem stationären Zustand befindet, im Zeitintervall $0 \leqq t \leqq T$ dagegen Gravitationsstrahlung aussendet. Das von diesem System erzeugte Gravitationsfeld[2] hängt für

[1] L. BEL, C. R. Acad. Sci., Paris **247**, 1094 [1958]; **246**, 3015 [1958].

[2] D. GEISSLER, A. PAPAPETROU u. H. TREDER, Ann. Phys., Lpz. (7) **2**, 344 [1959].

[3] H. WEYL, Raum—Zeit—Materie, Springer-Verlag, Berlin 1923, §§ 37, 38.

[4] $\alpha, \beta, \ldots = 0, 1, 2, 3$; $i, j, k, \ldots = 1, 2, 3$.